

ĐỀ 4

Câu 1. Cho tập hợp A gồm có 9 phần tử $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau lấy từ tập A ?

A. A_9^3 .

B. P_4 .

C. C_9^4 .

D. 4×9 .

Giải

Mỗi số tự nhiên ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 9 phần tử, suy ra có A_9^3 số. Chọn **A**

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3; u_5 = 48$. Công bội của cấp số nhân đó là

A. 4

B. 2

C. 16

D. $\frac{1}{4}$

Giải

Áp dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow u_5 = u_1 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{u_5}{u_1} = 16 \Rightarrow q = \pm 2$. Chọn **B**

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			0			0		$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(0; +\infty)$.

Giải

Từ BBT suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$. Chọn **C**

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và dấu của đạo hàm cho bởi bảng sau

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Giải

Từ BBT suy ra hàm số có hai điểm cực trị. Chọn **C**

Câu 5. Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên ở hình sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'	+ 0 –			– 0 +	
y	$-\infty \nearrow -3 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 1 \nearrow +\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -3.

B. 0.

C. -2.

D. 1.

Giải

Từ BBT suy ra hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1. Chọn **D**

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+		+ 0 –	
y	$2 \nearrow 4$		$-\infty \nearrow 3 \searrow -1$	

Hỏi đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 1.

B. 0.

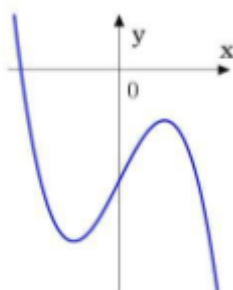
C. 3.

D. 2.

Giải

Từ BBT suy ra đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = -1$ và hai tiệm cận ngang $y = -1$, $y = 2$. Chọn **C**

Câu 7. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



A. $y = -x^3 + 2x - 2$.

B. $y = x^4 + 2x^2 - 2$.

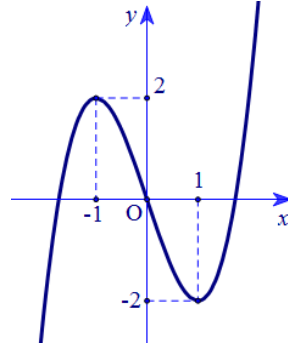
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

D. $y = -x^3 + 2x + 2$.

Giải

Từ hình vẽ suy ra hàm số bậc ba có hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại B, C. Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-2 \Rightarrow$ loại D. Chọn **A**

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) - 3m + 5 = 0$ có ba nghiệm phân biệt?



A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Giải

$$f(x) - 3m + 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3m - 5$$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < 3m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 < m < \frac{7}{3}$ suy ra có một số nguyên $m = 2$. Chọn **B**

Câu 9. Cho $a, b, c > 0; a \neq 1, b \neq 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_{a^c} b = c \log_a b$

B. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

C. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$

D. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

GiảiChọn **A**

Câu 10. Hàm số $y = (x^2 - x + 1)e^x$ có đạo hàm là

A. $y' = (x^2 + 1)e^x$

B. $y' = (2x - 1)e^x$

C. $y' = (x^2 + x)e^x$

D. $y' = (x^2 - x)e^x$

Giải

$$y' = (x^2 - x + 1)' e^x + (x^2 - x + 1) \cdot (e^x)' = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 1) \cdot e^x = (x^2 + x) \cdot e^x.$$

Chọn **C**

Câu 11. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.B. Hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.C. Đồ thị hàm số $y = a^x$ với $a > 0; a \neq 1$ luôn đi qua điểm $M(a; 1)$.D. Hàm số $y = a^x$ với $a > 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.**Giải.**

Các đáp án **B, C, D** đều sai. Chọn **A**

Câu 12. Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng:

A. 0.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Giải

$$5^{3x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2} \Leftrightarrow 5^{3x-2} = 5^{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0. \text{ Phương trình có hai nghiệm phân biệt } x_1 = 1, x_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 5$$

Chọn **B**

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x)$ là

A. $\{1 + \sqrt{2}\}$.B. $\{2; 41\}$.C. $\{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$.D. $\left\{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right\}$.**Giải**

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x). \text{ ĐK } \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ hay } x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x) \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \text{ (loại)}, x = 1 + \sqrt{2} \text{ (nhận)}. \text{ Chọn } \mathbf{A}$$

Câu 14. Nếu $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$ thì $f(x)$ bằng

A. $f(x) = 3x^2 + e^x$ B. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x$ C. $f(x) = x^2 + e^x$ D. $f(x) = \frac{x^2}{3} + e^x$ **Giải**

$$f(x) = \left(\int f(x).dx\right)' = \left(\frac{x^3}{3} + e^x + C\right)' = x^2 + e^x. \text{ Chọn } \mathbf{C}$$

Câu 15. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ và đồ thị của hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm

$M(0;1)$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. -1.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Giải

$$F(x) = \int f(x).dx = \int \sin x.d x = -\cos x + C.$$

$$\text{Đồ thị của hàm số } y = F(x) \text{ đi qua điểm } M(0;1) \Leftrightarrow F(0) = 1 \Leftrightarrow -\cos 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$$

$$\text{Suy ra } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2. \text{ Chọn } \mathbf{C}$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^4 f(x)dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(2x)dx$.

- A. $\int_0^2 f(2x)dx = 10$. B. $\int_0^2 f(2x)dx = 20$. C. $\int_0^2 f(2x)dx = 5$. D. $\int_0^2 f(2x)dx = \frac{5}{2}$.

Giải

$$I = \int_0^2 f(2x)dx. \text{ Đặt } t = 2x \text{ suy ra } I = \int_0^4 f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)dx = 5. \text{ Chọn } \mathbf{C}$$

Câu 17. Biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ và $\int_0^\pi f'(x)dx = 2\pi$. Tính $f(\pi)$.

- A. $f(\pi) = \frac{3\pi}{2}$. B. $f(\pi) = 2\pi$. C. $f(\pi) = \frac{5\pi}{2}$. D. $f(\pi) = 3\pi$.

Giải

$$\int_0^\pi f'(x)dx = 2\pi \Leftrightarrow f(x)|_0^\pi = 2\pi \Leftrightarrow f(\pi) - f(0) = 2\pi \Leftrightarrow f(\pi) = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}. \text{ Chọn } \mathbf{C}$$

Câu 18. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

- A. $\bar{z} = 3 - i$. B. $\bar{z} = -3 + i$. C. $\bar{z} = 3 + i$. D. $\bar{z} = -3 - i$.

Giải

$$z = i(3i + 1) \Leftrightarrow z = -3 + i \Rightarrow \bar{z} = -3 - i. \text{ Chọn } \mathbf{D}$$

Câu 19. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm môđun của số phức $w = (1 + i)z - \bar{z}$.

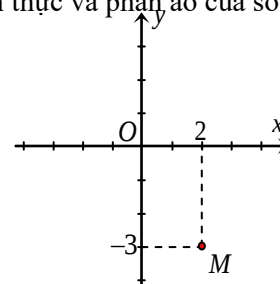
- A. $|w| = 3$. B. $|w| = 5$. C. $|w| = -4$. D. $|w| = \sqrt{7}$.

Giải

$$w = (1 + i)z - \bar{z} \Rightarrow w = (1 + i)(2 - 3i) - (2 + 3i) = 3 - 4i \Rightarrow |w| = 5. \text{ Chọn } \mathbf{B}$$

Câu 20. Điểm M trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- A. Phần thực là -3 và phần ảo là 2 .
B. Phần thực là 2 và phần ảo là -3 .
C. Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.
D. Phần thực là 2 và phần ảo là $-3i$.



Giải

$M(2; -3)$. Chọn **B**

Câu 21. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. B. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Giải

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \quad . \text{ Chọn C}$$

Câu 22. Một lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy là $11cm$, $12cm$, $13cm$ và diện tích xung quanh bằng $144cm^2$. Thể tích của khối lăng trụ đó là:

A. $24\sqrt{105}cm^3$. B. $12\sqrt{105}cm^3$. C. $18\sqrt{105}cm^3$. D. $6\sqrt{105}cm^3$.

Giải

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{11+12+13}{2} = 18$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6\sqrt{105}$$

Lăng trụ đứng có diện tích xung quanh bằng chu vi đáy nhân với chiều cao

$$\Rightarrow h = \frac{S_{xq}}{\text{Chu vi } \Delta ABC} = \frac{144}{11+12+13} = 4$$

$$V_{LT} = h.S_{\Delta ABC} = 4.6\sqrt{105} = 24\sqrt{105}$$

. Chọn A

Câu 23. Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = 15cm$ và đường sinh $l = 25cm$. Thể tích V của khối nón là:

A. $V = 2000\pi(cm^3)$. B. $V = 240\pi(cm^3)$. C. $V = 500\pi(cm^3)$. D. $V = 1500\pi(cm^3)$.

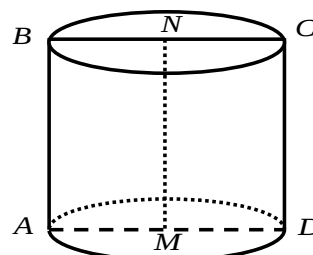
Giải

$$\text{Ta có } r^2 = l^2 - h^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \Rightarrow r = 20$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 15 = 2000\pi \quad . \text{ Chọn A}$$

Câu 24. Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$, $AD = 2$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó?

A. 10π . B. 4π .
C. 2π . D. 6π .



Giải

Ta có $h = AB = 1$, $r = \frac{AD}{2} = 1$

$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_d = 2\pi r.h + 2\pi.r^2 = 4\pi$. Chọn **B**

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (3; -2; m)$, $\vec{b} = (2; m; -1)$ với m là tham số nhận giá trị thực. Tìm giá trị của m để hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = -1$.

D. $m = -2$.

Giải

Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 - 2m - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$

. Chọn **B**

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x^2(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

B. $f(x)$ không có cực trị.

C. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

D. $f(x)$ có hai điểm cực trị.

Giải

$f'(x) = x^2(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$ cùng dấu với $(x-1)$, suy ra $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Chọn **A**

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$ và $P(0; 0; 2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$.

B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$.

C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$.

D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$.

Giải

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Chọn **D**

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vec tơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}_1 = (2; -4; -2)$.

B. $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$.

C. $\vec{u}_3 = (2; 1; 1)$.

D. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$.

Giải

Đường thẳng d có một vec tơ chỉ phương là: $\vec{u} = (-1; 2; 1) \Rightarrow -2\vec{u} = (2; -4; -2)$

Chọn **A**

Câu 29. Một túi đựng 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi, xác suất để cả hai bi đều màu đỏ là

A. $\frac{8}{15}$.

B. $\frac{2}{15}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Giải

$n(\Omega) = C_{10}^2 = 45$, $n(A) = C_4^2 = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

Chọn **B****Câu 30.** Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực?

A. $y = -x^3 + 2x^2 - 10x + 4.$

B. $y = \frac{x+10}{x-1}.$

C. $y = x^2 - 5x + 6.$

D. $y = x + 5.$

GiảiLoại **B** vì tập xác định không phải là $\mathbb{R}$, loại **C** vì đồ thị là Parabol, loại **D** vì $y' = 1 > 0$, với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.Chọn **A****Câu 31.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:

A. 2.

B. -23.

C. -22.

D. -7.

GiảiSử dụng máy tính cầm tay ta được GTNN là -7. Chọn **D****Câu 32.** Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq -1$ là

A. $x \geq 3.$

B. $1 \leq x < 3.$

C. $1 < x \leq 3.$

D. $x \leq 3.$

Giải

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq -1 \Leftrightarrow 0 < x-1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 < x \leq 3. \text{ Chọn } \mathbf{C}$$

Câu 33. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 1, \int_0^1 f(2x)dx = 2$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)dx$ bằng

A. -2

B. 28

C. 6

D. 2

Giải

$$\int_0^1 f(2x)dx = 2. (*) \text{ . Đặt } t = 2x \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \int_0^2 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) \cdot dx = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) \cdot dx = 4$$

$$\text{Xét } I = \int_0^2 xf'(x)dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$I = x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) \cdot dx = 2 \cdot f(2) - 4 = 2 \cdot 1 - 4 = -2. \text{ Chọn } \mathbf{A}$$

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $2z = i(\bar{z} + 3)$. Môđun của z là

A. $|z| = \sqrt{5}.$

B. $|z| = 5.$

C. $|z| = \frac{3\sqrt{5}}{4}.$

D. $|z| = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$

Giải

$$\text{Đặt } z = x + y \cdot i$$

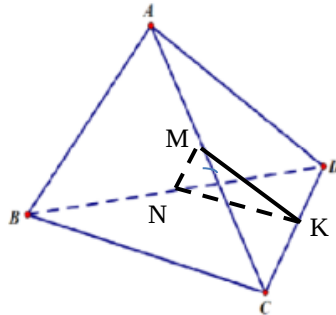
$$2z = i(\bar{z} + 3) \Leftrightarrow 2(x + y \cdot i) = i(x - yi + 3) \Leftrightarrow 2x + 2y \cdot i = y + (x + 3) \cdot i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 2y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } |z| = \sqrt{5}. \text{ Chọn } \mathbf{A}$$

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 14, BC = 6$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD và $MN = 8$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BC và MN . Tính $\sin \alpha$.

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Giải



Gọi K là trung điểm của CD . Góc giữa BC và MN là góc giữa NK và MN
 Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác MNK

$$\cos \alpha = |\cos \widehat{KNM}| = \frac{|MN^2 + KN^2 - KM^2|}{2 \cdot MN \cdot KN} = \frac{|8^2 + 3^2 - 7^2|}{2 \cdot 8 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

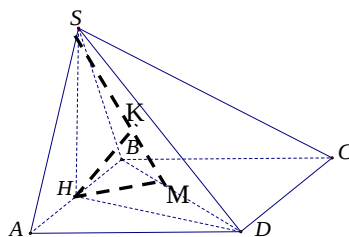
Chọn **B**

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S lên mặt

($ABCD$) là trung điểm của đoạn AB . Tính chiều cao của khối chóp $H.SBD$ theo a .

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.
 C. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. D. $\frac{3a}{5}$.

Giải



Dựng HM vuông góc với BD , dựng HK vuông góc với SM . Chứng minh được HK vuông góc với $mp(SBD)$ suy ra chiều cao của khối chóp $H.SBD$ là độ dài đoạn HK

$$S_{\triangle HBD} = \frac{1}{2} HB \cdot AD = \frac{a^2}{4} \text{ suy ra } HM = \frac{2 \cdot S_{\triangle HBD}}{BD} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Tam giác ADH vuông tại A có $HD = \sqrt{AH^2 + AD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Tam giác SDH vuông tại H có $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\frac{17a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}} = a\sqrt{3}$

Tam giác SHM vuông tại H có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{25}{3a^2}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{5}$$

Chọn **A**

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;3)$, $B(-2;3;0)$, $C(4;3;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm B và đi qua trọng tâm G của tam giác ABC có phương trình là

A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = \sqrt{10}$.

B. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 10$.

C. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 10$.

D. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = \sqrt{10}$.

Giải

Ta có $G(1; 2; 0)$, bán kính $R = BG = \sqrt{10}$. Chọn **B**

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(2;3;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 5 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Giải

Ta có VTCP $\vec{a} = (1; 3; -1)$ loại **A** và **D**. Thế tọa độ điểm $A(2; 3; 0)$ vào ph/trình ở câu **B** (đúng).

Chọn **B**

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$		5	1	3	-2	10

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(\cos x)$

A. 5.

B. 3.

C. 10.

D. 1.

Giải

Đặt $t = \cos x$ khi đó $t \in [-1; 1]$, nhìn vào bảng biến thiên giới hạn trên đoạn $[-1; 1]$ ta được GTLN là 5

Chọn **A**

Câu 40. Số nghiệm của phương trình $\log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Giải

ĐK: $x \neq 0; x \neq \sqrt{2}$.

$$\text{Đặt } t = x^2 - \sqrt{2}x \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 2 = t + 2$$

$$\Rightarrow \log_3 |t| = \log_5 (t + 2).$$

$$\text{Đặt } \log_3 |t| = \log_5 (t + 2) = u$$

$$\begin{cases} \log_3 |t| = u \\ \log_5 (t+2) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |t| = 3^u \\ t+2 = 5^u \end{cases}$$

$$\Rightarrow |5^u - 2| = 3^u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^u - 2 = 3^u \\ 5^u - 2 = -3^u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^u + 3^u = 2 \\ 3^u + 2 = 5^u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^u + 3^u = 2 & (1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1 & (2) \end{cases}.$$

Xét (1): $5^u + 3^u = 2$

Ta thấy $u = 0$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 0$ là duy nhất.

Với $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

Xét (2): $\left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1$

Ta thấy $u = 1$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 1$ là duy nhất.

Với $u = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \neq 0$; $x \neq \sqrt{2}$.

Chọn **B**

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0; 1]$; $g(x)$ là hàm số thỏa mãn

$$g'(x) = 1 + 1008 \int_0^x f(t) dt \text{ và } g(x) = f^2(x). \text{ Tính } \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx :$$

A. 1014

B. 253

C. $\frac{507}{2}$

D. $\frac{1017}{2}$

Giải

$$g'(x) = 1 + 1008 \int_0^x f(t) dt \Rightarrow g'(x) = 1008f(x), g(0) = 1 + 1008 \int_0^0 f(t) dt = 1$$

$$f^2(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt{g(x)}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 1008\sqrt{g(x)} \Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 1008$$

Lấy tích phân hai vế trên $[0; t]$:

$$\int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = \int_0^t 1008 dx \Leftrightarrow 2\sqrt{g(x)} \Big|_0^t = 1008t \Big|_0^t \Leftrightarrow 2\sqrt{g(t)} - 1 = 1008t \Leftrightarrow \sqrt{g(t)} = 504t + 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx = \int_0^1 504x + 1 dx = 253$$

Chọn **B**

Câu 42. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

$$|z - 1| = \sqrt{34}; |z + 1 + mi| = |z + m + 2i| \text{ (trong đó } m \text{ là số thực) sao cho}$$

$|z_1 - z_2|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$.

B. 10.

C. 2.

D. $\sqrt{130}$.

Giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 .

Gọi số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có $|z - 1| = \sqrt{34} \Rightarrow M, N$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{34}$.

$$\text{Mà } |z + 1 + mi| = |z + m + 2i| \Leftrightarrow |(x+1) + (y+m)i| = |(x+m) + (y+2)i|$$

$$\Leftrightarrow (2-2m)x + (2m-4)y - 3 = 0 \Rightarrow M, N \text{ thuộc đường thẳng } (d) \quad (2-2m)x + (2m-4)y - 3 = 0$$

Do đó M, N là giao điểm của d và đường tròn (C) .

Ta có $|z_1 - z_2| = MN$ nên $|z_1 - z_2|$ lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất.

$\Leftrightarrow MN$ là đường kính của đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{34}$

$$\text{Khi đó } |z_1 + z_2| = 2|\overline{OI}| = 2.OI = 2$$

Chọn **C**

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA = SB = SC = SD$, $AB = a$; $AD = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng SAB và SCD là 60° . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{17a\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{17a\sqrt{3}}{24}$.

C. $\frac{17a\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{17a\sqrt{3}}{18}$.

Giải

Kẻ $d // AB // CD$ $S \in d \Rightarrow d = SAB \cap SCD$.

Gọi P, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên:

$$d // CD \perp SOK \Rightarrow d // CD \perp SK \quad 1.$$

$$d // AB \perp SOP \Rightarrow d // AB \perp SP \quad 2.$$

Từ 1, 2 $\Rightarrow SK, SP \perp d \Rightarrow SAB, SCD = SP, SK = PSK = 60^\circ$.

Xét tam giác SOK , vuông tại O , ta có: $\frac{OK}{SO} = \tan OSK$.

$$\Rightarrow SO = \frac{OK}{\tan OSK} = \frac{a}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}.$$

(Hoặc tam giác SOK đều, do trung tuyến SO cũng là đường cao và góc $PSK = 60^\circ$ suy ra

$$SO = \frac{\sqrt{3}}{2}.PK = a\sqrt{3})$$

$$\text{Xét tam giác } SOD, \text{ vuông tại } O, \text{ ta có: } SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

Trong mp(SOD), kẻ đường trung trực d' của SD , d' cắt SO tại I , khi đó $\triangle SID$ cân tại I .

$$\Rightarrow IS = ID = IA = IB = IC = R.$$

Suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là I , bán kính mặt cầu $R = IS$

Ta có: tứ giác $IODN$ nội tiếp (N là trung điểm của SD), suy ra $SI.SO = SN.SD$

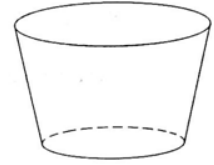
$$\Rightarrow IS.SO = \frac{SD}{2}.SD \Rightarrow R = IS = \frac{SD^2}{2SO} = \frac{\frac{17a^2}{4}}{2.a\sqrt{3}} = \frac{17a\sqrt{3}}{24}.$$

Chọn **B**

Câu 44. Một vật thể có hai đáy trong đó đáy lớn là một elip có độ dài trục lớn là 8, trục bé là 4 và đáy bé có độ dài trục lớn là 4, trục bé là 2. Thiết diện vuông góc với trục của elip luôn là một elip. Biết chiều cao của vật thể là 4, tính thể tích vật thể

A. $\frac{55}{3}\pi$
C. $\frac{57}{3}\pi$

B. $\frac{56}{3}\pi$
D. $\frac{58}{3}\pi$



Giải

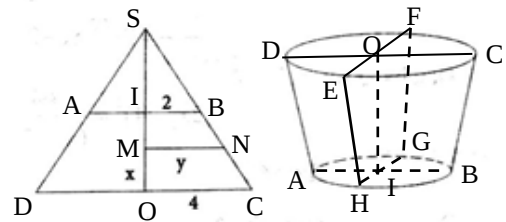
Xét thiết diện ABCD thiết diện qua trục IO và 2 trục lớn của hai đáy có $IO = 4$, $SO = 2 \cdot IO = 8$, $MN = y$, $IB = 2$, $OC = 4$, $OM = x$

$$\text{Ta có } \frac{MN}{OC} = \frac{SM}{SO} = \frac{SO - OM}{SO} \Rightarrow \frac{y}{4} = \frac{8 - x}{8} \Leftrightarrow y = 4 - \frac{x}{2}$$

Tương tự xét thiết diện EFGH qua trục IO và 2 trục bé của hai đáy

$$\text{Ta có } \frac{8 - x}{8} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2 - \frac{x}{4}$$

$$\text{Do đó thể tích vật thể bằng } \pi \int_0^4 \left(4 - \frac{x}{2}\right) \left(2 - \frac{x}{4}\right) dx = \frac{56}{3}\pi$$



Chọn **B**

Cách khác Sử dụng công thức tính thể tích hình nón cụt, có thể thay hai đáy hình tròn thành hai đáy hình elip

$$V = \frac{h}{3} (S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$$

Với S là diện tích hình elip của đáy lớn $S = ab\pi = 4 \cdot 2 \cdot \pi = 8\pi$
(a, b là độ dài nửa trục lớn, nửa trục bé)

S' là diện tích hình elip của đáy nhỏ $S' = a'b'\pi = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$

$$V = \frac{4}{3} (8\pi + 2\pi + \sqrt{8\pi \cdot 2\pi}) = \frac{56\pi}{3}$$

Chọn **B**

Câu 45. Trong không gian Oxyz, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu

$(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

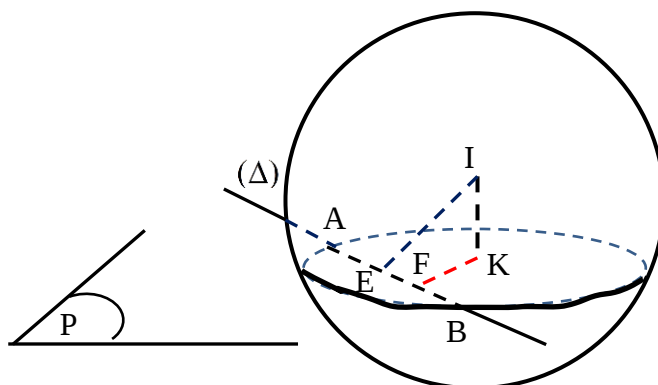
A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Giải



$(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$, có tâm $I(3;2;5)$ và $R=6$

Ta có: $\overrightarrow{EI} = (1;1;2) \Rightarrow |\overrightarrow{EI}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < 6 = R$.

Do đó điểm E nằm trong mặt cầu (S). Vì $E \in (P)$ và $\begin{cases} E \in \Delta \\ \Delta \subset (P) \end{cases}$ nên giao điểm của (Δ) và (S) nằm trên đường tròn giao tuyến (C) tâm K của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S), trong đó K là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P). Gọi $\Delta \cap (S) = \{A; B\}$. Độ dài AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(K, \Delta)$ lớn nhất.

Gọi F là hình chiếu của K trên (Δ) khi đó $d(K; \Delta) = KF \leq KE$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $F \equiv E$.

$$\text{Vì } \begin{cases} IK \perp (P) \\ KE \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IK \perp \Delta \\ KE \perp \Delta \end{cases} \Rightarrow IE \perp \Delta.$$

Mặt khác: $[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{EI}] = (5; -5; 0)$, cùng phương với $\vec{u} = (1; -1; 0)$.

$$\text{Vì } \begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp IE \end{cases} \text{ nên } \Delta \text{ có một vectơ chỉ phương là } \vec{u} = (1; -1; 0). \text{ Vậy } \Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$$

Chọn **C**

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 4 - 2m^2$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = |\pi f(x)|$ có đúng 3 cực trị.

A. 6

B. 8

C. 9

D. 7

Mệnh đề:

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ = Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ + Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ (trừ đi những nghiệm nào trùng với điểm cực trị)

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 4 - 2m^2$ có $f'(x) = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

TH1: $m \leq 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị $x = 0$.

$\Rightarrow$ Để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 3 cực trị thì phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Rightarrow f(0) < 0 \Leftrightarrow 4 - 2m^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m \leq 0 \Rightarrow m < -\sqrt{2}$

TH2: $m > 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ có 3 cực trị.

BBT:

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$							

Hàm số $y = |f(x)|$ có đúng 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có 2 nghiệm trùng với $x = \pm\sqrt{m}$

$$\Rightarrow f(\sqrt{m}) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + 4 - 2m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} \leq m \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện} \Rightarrow 0 < m \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện đề bài ta có } \begin{cases} m \in (-10; -\sqrt{2}) \cup \left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-9; -8; \dots; -2; 1\}$$

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn **C**.

Câu 47. Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3(1 + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}) > 2\log_2 \sqrt{a}$.

Tìm phần nguyên của $\log_2(2017a)$.

A. 14.

B. 22.

C. 16.

D. 19.

Giải

Đặt $t = \sqrt[6]{a}, t > 0$, từ giả thiết ta có $3\log_3(1 + t^3 + t^2) > 2\log_2 t^3$

$$\Leftrightarrow f(t) = \log_3(1 + t^3 + t^2) - \log_2 t^2 > 0$$

$$f'(t) = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{3t^2 + 2t}{t^3 + t^2 + 1} - \frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{(3\ln 2 - 2\ln 3)t^3 + (2\ln 2 - 2\ln 3)t^2 - 2\ln 3}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot (t^4 + t^3 + t)}$$

Vì đề xét a nguyên dương nên ta xét $t \geq 1$.

$$\text{Xét } g(t) = (3\ln 2 - 2\ln 3)t^3 + (2\ln 2 - 2\ln 3)t^2 - 2\ln 3$$

$$\text{Ta có } g'(t) = 3\ln \frac{8}{9}t^2 + 2\ln \frac{4}{9}t = t \left(3\ln \frac{8}{9}t + 2\ln \frac{4}{9} \right)$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2\ln \frac{9}{4}}{3\ln \frac{8}{9}} < 0.$$

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số $g(t)$ giảm trên khoảng $[1; +\infty)$.

$$\text{Suy ra } g(t) \leq g(1) = 5\ln 2 - 6\ln 3 < 0 \Rightarrow f'(t) < 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn giảm trên khoảng $[1; +\infty)$.

Nên $t = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = 0$.

Suy ra $f(t) > 0 \Leftrightarrow f(t) > f(4) \Leftrightarrow t < 4 \Leftrightarrow \sqrt[6]{a} < 4 \Leftrightarrow a < 4096$.

Nên số nguyên a lớn nhất thỏa mãn giả thiết bài toán là $a = 4095$.

Lúc đó $\log_2(2017a) \approx 22,97764311$.

Nên phần nguyên của $\log_2(2017a)$ bằng 22.

Chọn **B**.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; \pi]$.

Biết $f(0) = 2e$ và $f(x)$ luôn thỏa mãn đẳng thức

$$f'(x) + \sin x f(x) = \cos x e^{\cos x} \quad \forall x \in [0; \pi].$$

Tính $I = \int_0^{\pi} f(x) dx$ (làm tròn đến phần trăm)

A. $I \approx 6,55$

B. $I \approx 17,30$

C. $I \approx 10,31$

D. $I \approx 16,91$

Giải

$$f'(x) + \sin x f(x) = \cos x e^{\cos x} \quad \forall x \in [0; \pi]$$

$$\Leftrightarrow f'(x) e^{-\cos x} + \sin x f(x) e^{-\cos x} = \cos x$$

$$\Leftrightarrow [f(x) e^{-\cos x}]' = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t [f(x) e^{-\cos x}] dx = \int_0^t \cos x dx$$

$$\Leftrightarrow f(x) e^{-\cos x} \Big|_0^t = \sin x \Big|_0^t$$

$$\Leftrightarrow f(t) e^{-\cos t} - f(0) \cdot e^{-1} = \sin t$$

$$\Leftrightarrow f(t) e^{-\cos t} - 2e \cdot e^{-1} = \sin t$$

$$\Leftrightarrow f(t) e^{-\cos t} = \sin t + 2$$

$$\Leftrightarrow f(t) = (\sin t + 2) e^{\cos t}$$

$$\text{Khi đó ta có } I = \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (\sin x + 2) e^{\cos x} dx \approx 10,31$$

Chọn **C**.

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|. \text{ Tính giá trị } M.m.$$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{39}{4}$

C. $3\sqrt{3}$

D. $\frac{13}{4}$

Giải

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1$ (do $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$)

Đặt $t = |z + 1|$, ta có

$$0 = ||z| - 1| \leq |z + 1| \leq |z| + 1 = 2 \Rightarrow t \in [0; 2]$$

$$(do\ BDT\ ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|)$$

Ta có

$$\begin{aligned} t^2 &= |1 + z|^2 = (1 + z)(\overline{1 + z}) \\ &= (1 + z)(1 + \bar{z}) = 1 + z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} = 2 + 2x \Rightarrow x = \frac{t^2 - 2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Chú ý: } \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

Suy ra

$$|z^2 - z + 1| = |z^2 - z + z \cdot \bar{z}| = |z| |z - 1 + \bar{z}| = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1| = |t^2 - 3|$$

Xét hàm số $f(t) = t + |t^2 - 3|, t \in [0; 2]$

Dùng đạo hàm tính giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm $f(t)$, suy ra

$$\max f(t) = \frac{13}{4} \text{ khi } t = \frac{1}{2}; \min f(t) = \sqrt{3} \text{ khi } t = \sqrt{3} \Rightarrow M.n = \frac{13\sqrt{3}}{4}$$

Chọn **A**

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm

$A(7; 2; 3), B(1; 4; 3), C(1; 2; 6), D(1; 2; 3)$ và điểm M tùy ý.

Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức

$P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\text{A. } OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$$

$$\text{B. } OM = \sqrt{26}$$

$$\text{C. } OM = \sqrt{14}$$

$$\text{D. } OM = \frac{5\sqrt{17}}{4}$$

Giải

Giả sử $M(x + 1; y + 2; z + 3)$.

Ta có $MA = \sqrt{(x - 6)^2 + y^2 + z^2} \geq |x - 6| \geq 6 - x$.

$$MB = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2 + z^2} \geq |y - 2| \geq 2 - y$$

$$MC = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2} \geq |z - 3| \geq 3 - z$$

$$\sqrt{3} \cdot MD = \sqrt{3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)} \geq \sqrt{(x + y + z)^2} \geq x + y + z$$

Do đó $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD \geq 6 - x + 2 - y + 3 - z + x + y + z = 11$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 11 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} = 6-x \\ \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} = 2-y \\ \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} = 3-z \\ \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = x+y+z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 2-y \geq 0 \\ 3-z \geq 0 \\ x+y+z \geq 0 \\ x=y=z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0 \Rightarrow M(1;2;3) \text{ khi đó } OM = \sqrt{14}$$

Chọn **C**